

Seminar Angewandte Automatentheorie, WS 2009/2010

Der Universal-Automat

Konstruktion und NEA-Minimierung

David Rasmus Piegdon

Betreuer: Christof Löding

Lehrstuhl für Informatik VII, RWTH Aachen

Freitag, 15. Jan. 2010



Quellen

- S. Lombardy and J. Sakarovitch.
The Universal Automaton.
In Logic and Automata, History and Perspectives,
Amsterdam Univ. Press (2007) 457–504.

(Weitere Quellen siehe Paper)



Inhalt

- 1 Einführung
- 2 Konstruktion des Universal-Automaten
- 3 NEA-Minimierung
- 4 Fazit



Universal-Automat

- Eindeutig für jede reguläre Sprache.
- Für Automaten der gleichen Sprachen existiert Morphismus in Universal-Automaten.
- Kann einfach konstruiert werden.
- Hilft beim Minimieren von NEAs.
- Gibt teilweise Auskunft über Sternhöhe der Sprache.



Inhalt

- 1 Einführung
- 2 Konstruktion des Universal-Automaten**
- 3 NEA-Minimierung
- 4 Fazit



Definition des Universal-Automaten

Universal-Automat \mathcal{U}_L

- $\mathcal{U}_L = (\mathcal{F}_L, \Sigma, \Delta^U, Q_I^U, Q_F^U)$
- $\mathcal{F}_L = \{ (X, Y) \mid (X, Y) \text{ ist max. Faktorisierung von } L \}$
- $\Delta^U = \{ ((X, Y), a, (X', Y')) \in \mathcal{F}_L \times \Sigma \times \mathcal{F}_L \mid X \cdot a \cdot Y' \subseteq L \}$
- $Q_I^U = \{ (X, Y) \mid \epsilon \in X \}$
- $Q_F^U = \{ (X, Y) \mid \epsilon \in Y \}$



Konstruktion des Universal-Automaten

Eingabe: DEA \mathcal{A}_L

- Zustände entsprechen Links-Quotienten der Sprache:

$$\forall w : w^{-1}L = \text{Fut}_{\mathcal{A}}(\delta(q_I, w))$$

- Jeder Schnitt von Links-Quotienten ist ein Rechts-Faktor
- ⇒ Alle möglichen Durchschnitte bilden.



Definition Co-Determinisierung

$$CODET(\mathcal{A}_L) = \overleftarrow{DET(\overleftarrow{\mathcal{A}_L})}$$

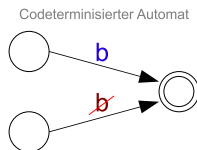
- Umdrehen aller Transitionen, vertauschen von Anfangs- und Endzustände.
- Determinisieren (Potenzmengenkonstruktion).
- Wieder Umdrehen aller Transitionen, vertauschen von Anfangs- und Endzustände.



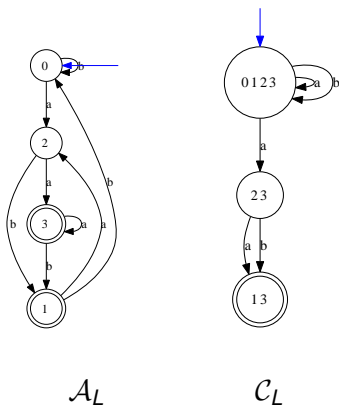
Eigenschaften

Eigenschaften des **codeterminisierten Automaten**:

- $L_{CODET(\mathcal{A})} = L_{\mathcal{A}}$
- Hat genau einen Endzustand.
- Jeder Zustand hat pro $a \in \Sigma$ maximal eine einkommende Transition.
- \Rightarrow **Es gibt keine 2 Zustände mit gleicher Zukunft.**



Beispiel

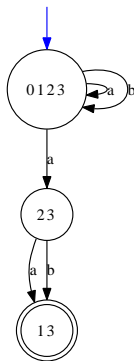


$$L = \Sigma^* a \Sigma$$

$$\mathcal{C}_L = \text{CODET}(\mathcal{A}_L)$$

$$= (Q^C, \Sigma, \text{Delta}^C, Q_I^C, \{q_F^C\})$$

- zufällig Zustandsminimal
- $Q^C \subseteq 2^Q$
- $Q^C = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\} \}$

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ Definition $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 

$$\mathcal{C}_L = \text{CODET}(\mathcal{A}_L)$$

$$Q^C = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\} \}$$

Definition

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} := Q^C$ geschlossen unter Schnitt.

Hier:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\} \}$$



\mathcal{I}_A $\mathcal{I}_A \sim \mathcal{F}_L$

Es gibt eine Bijektion zwischen \mathcal{I}_A und \mathcal{F}_L :

$$\psi_A : \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{F}_L$$

$$\psi_A(P) := (X, Y) \quad \text{mit} \quad Y = \bigcap_{p \in P} Fut_A(p)$$



\mathcal{I}_A

Beweis: ψ_A ist Bijektion:

$$\psi_A : \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{F}_L : \quad \psi_A(P) := (X, Y) \quad \text{mit} \quad Y = \bigcap_{p \in P} \text{Fut}_A(p)$$

ψ_A ist wohldefiniert:

- Jeder Schnitt von Links-Quotienten ist ein Rechts-Faktor.



Beweis: ψ_A ist Bijektion:

$$\psi_A : \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{F}_L : \quad \psi_A(P) := (X, Y) \quad \text{mit} \quad Y = \bigcap_{p \in P} Fut_A(p)$$

$$\text{Sei } \chi_A = \psi_A^{-1} : \quad \chi_A : \mathcal{F}_L \rightarrow 2^Q,$$

$$\chi_A((X, Y)) := \{ p \in Q \mid Y \subseteq Fut_A(p) \}$$

Wenn ψ_A Bijektion, dann auch χ_A .



Beweis: $\psi_{\mathcal{A}}$ ist Bijektion:

$$\chi_{\mathcal{A}} : \mathcal{F}_L \rightarrow 2^Q : \quad \chi_{\mathcal{A}}((X, Y)) := \{ p \in Q \mid Y \subseteq \text{Fut}_{\mathcal{A}}(p) \}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}((X, Y)) = P \quad , \quad R = \{ S \in Q^C \mid P \subseteq S \}$$



Beweis: ψ_A ist Bijektion:

$$\chi_A : \mathcal{F}_L \rightarrow 2^Q : \quad \chi_A((X, Y)) := \{ p \in Q \mid Y \subseteq \text{Fut}_A(p) \}$$

$$\chi_A((X, Y)) = P \quad , \quad R = \{ S \in Q^C \mid P \subseteq S \}$$

Codeterminisierter Automat:

$$\text{Fut}_C(S) \subseteq \bigcap_{p \in S} \text{Fut}_A(p)$$



Beweis: ψ_A ist Bijektion:

$$\chi_A : \mathcal{F}_L \rightarrow 2^Q : \quad \chi_A((X, Y)) := \{ p \in Q \mid Y \subseteq \text{Fut}_A(p) \}$$

$$\chi_A((X, Y)) = P \quad , \quad R = \{ S \in Q^C \mid P \subseteq S \}$$

$$\forall p : [p \in P \leftrightarrow p \in \bigcap_{S \in R} S]$$

$$\Rightarrow P = \bigcap_{S \in R} S \quad \Rightarrow P \in \mathcal{I}_A$$



Beweis: ψ_A ist Bijektion:

$$\chi_A : \mathcal{F}_L \rightarrow 2^Q : \quad \chi_A((X, Y)) := \{ p \in Q \mid Y \subseteq \text{Fut}_A(p) \}$$

$$\chi_A((X, Y)) = P \quad , \quad R = \{ S \in Q^C \mid P \subseteq S \}$$

$$\forall p : [p \in P \leftrightarrow p \in \bigcap_{S \in R} S]$$

$$\Rightarrow P = \bigcap_{S \in R} S \quad \Rightarrow P \in \mathcal{I}_A$$



\mathcal{I}_A

$$\mathcal{I}_A \sim \mathcal{F}_L$$

Jedes Element in \mathcal{I}_A Entspricht

- einer Faktorisierung,
- einem Zustand des Universalautomaten.



Konkrete Konstruktion

$$\mathcal{V}_L := (\mathcal{I}_A, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

$$\Delta^V = \{ (P, a, S) \mid \delta(P, a) \subseteq S \}$$

$$Q_I^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I \in P \}$$

$$Q_F^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid P \subseteq Q_F \}$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ ((X_P, Y_P), a, (X_S, Y_S)) \mid X_P \cdot a \cdot Y_S \subseteq L \}$$

$$= \Delta^U \sim \Delta^V =$$

$$\{ (P, a, S) \mid \delta(P, a) \subseteq S \}$$

$$\delta(P, a) \subseteq S \iff Y_S \subseteq \bigcap_{p \in \delta(P, a)} F(p)$$

$$\iff a \cdot Y_S \subseteq \bigcap_{p \in P} F(p) = Y_P \iff X_P \cdot a \cdot Y_S \subseteq L$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ ((X_P, Y_P), a, (X_S, Y_S)) \mid X_P \cdot a \cdot Y_S \subseteq L \}$$

$$= \Delta^U \sim \Delta^V =$$

$$\{ (P, a, S) \mid \delta(P, a) \subseteq S \}$$

$$\delta(P, a) \subseteq S \iff Y_S \subseteq \bigcap_{p \in \delta(P, a)} F(p)$$

$$\iff a \cdot Y_S \subseteq \bigcap_{p \in P} F(p) = Y_P \iff X_P \cdot a \cdot Y_S \subseteq L$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ (X, Y) \mid \epsilon \in X \} = Q_I^U \sim Q_I^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I \in P \}$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ (X, Y) \mid \epsilon \in X \} = Q_I^U \sim Q_I^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I \in P \}$$

$$X = \bigcup_{p \in P} \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow q_I \in P \leftrightarrow \epsilon \in \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow \epsilon \in X$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ (X, Y) \mid \epsilon \in X \} = Q_I^U \sim Q_I^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I \in P \}$$

$$X = \bigcup_{p \in P} \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow q_I \in P \leftrightarrow \epsilon \in \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow \epsilon \in X$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ (X, Y) \mid \epsilon \in X \} = Q_I^U \sim Q_I^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I \in P \}$$

$$X = \bigcup_{p \in P} \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow q_I \in P \leftrightarrow \epsilon \in \text{Past}_A(p)$$

$$\Rightarrow \epsilon \in X$$



Beweis: $\mathcal{U}_L \sim \mathcal{V}_L$

$$\{ (X, Y) \mid \epsilon \in Y \} = Q_F^U \sim Q_F^V = \{ P \in \mathcal{I}_A \mid P \subseteq Q_F \}$$

(ähnlich wie bei $Q_I^U \sim Q_I^V$)



Beispiel

$$\mathcal{V}_L = (\mathcal{I}_A, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

 \mathcal{V}_L 

Beispiel

13

0123

23

3

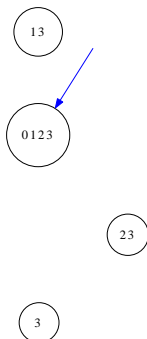
 \mathcal{V}_L

$$\mathcal{V}_L = (\mathcal{I}_A, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

$$\mathcal{I}_A = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\} \}$$



Beispiel


 \mathcal{V}_L

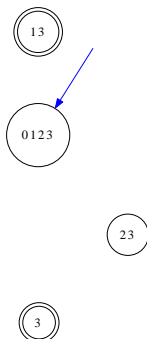
$$\mathcal{V}_L = (\mathcal{I}_A, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

$$\mathcal{I}_A = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\} \}$$

$$\begin{aligned} Q_I^V &= \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I = 0 \in P \} \\ &= \{ \{0, 1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$



Beispiel


 \mathcal{V}_L

$$\mathcal{V}_L = (\mathcal{I}_A, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

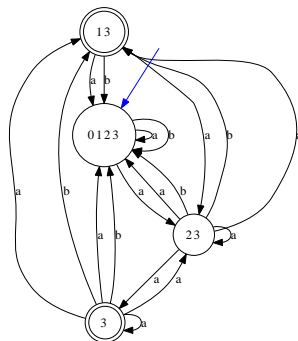
$$\mathcal{I}_A = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\} \}$$

$$\begin{aligned} Q_I^V &= \{ P \in \mathcal{I}_A \mid q_I = 0 \in P \} \\ &= \{ \{0, 1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_F^V &= \{ P \in \mathcal{I}_A \mid P \subseteq Q_F = \{1, 3\} \} \\ &= \{ \{1, 3\}, \{3\} \} \end{aligned}$$



Beispiel

 \mathcal{V}_L

$$\mathcal{V}_L = (\mathcal{I}_{\mathcal{A}}, \Sigma, \Delta^V, Q_I^V, Q_F^V)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \{ \{0, 1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\} \}$$

$$\begin{aligned} Q_I^V &= \{ P \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \mid q_I = 0 \in P \} \\ &= \{ \{0, 1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_F^V &= \{ P \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \mid P \subseteq Q_F = \{1, 3\} \} \\ &= \{ \{1, 3\}, \{3\} \} \end{aligned}$$

$$\Delta^V = \{ (P, a, S) \mid \delta(P, a) \subseteq S \}$$



Komplexität der Konstruktion

- Co-Determinisierung: wie Potenzmengen-Konstruktion:
 $Q^C \subseteq 2^Q \Rightarrow$ Exponentielle Zeit, Exponentieller Speicher.
- Konstruktion von \mathcal{I}_A : ebenso $\mathcal{I}_A \subseteq 2^Q$.
- Δ^V hat max. $2^{|\mathcal{Q}|} \cdot |\Sigma| \cdot 2^{|\mathcal{Q}|}$ Elemente.
- Q_I^V und Q_F^V : maximal $2^{|\mathcal{Q}|}$ Elemente

\Rightarrow In Relation zur Zustandsgröße von \mathcal{A}_L :

- exponentielle Zeit
- exponentiell viel Speicher



Komplexität der Konstruktion

- Co-Determinisierung: wie Potenzmengen-Konstruktion:
 $Q^C \subseteq 2^Q \Rightarrow$ Exponentielle Zeit, Exponentieller Speicher.
- Konstruktion von \mathcal{I}_A : ebenso $\mathcal{I}_A \subseteq 2^Q$.
- Δ^V hat max. $2^{|\mathcal{Q}|} \cdot |\Sigma| \cdot 2^{|\mathcal{Q}|}$ Elemente.
- Q_I^V und Q_F^V : maximal $2^{|\mathcal{Q}|}$ Elemente

\Rightarrow In Relation zur Zustandsgröße von \mathcal{A}_L :

- exponentielle Zeit
- exponentiell viel Speicher



Inhalt

- 1 Einführung
- 2 Konstruktion des Universal-Automaten
- 3 NEA-Minimierung
- 4 Fazit



NEA-Minimierung

- Zustandsminimierung von NEAs ist PSPACE-Vollständig.
- Vorgestellter Algorithmus ist exponentiell (Speicher, Zeit)
- in Praxis meist effizienter und konkurrenzfähig.



Definition Morphismus

Gegeben zwei Automaten

$$\mathcal{A} = (Q^A, \Sigma, \Delta^A, Q_I^A, Q_F^A) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (Q^B, \Sigma, \Delta^B, Q_I^B, Q_F^B)$$

Eine Funktion $\varphi : Q^A \rightarrow Q^B$ ist ein **Morphismus** g.d.w.

- $\varphi(Q_I^A) \subseteq Q_I^B$
- $\varphi(Q_F^A) \subseteq Q_F^B$
- $\forall (q, a, q_t) \in \Delta^A : (\varphi(q), a, \varphi(q_t)) \in \Delta^B$



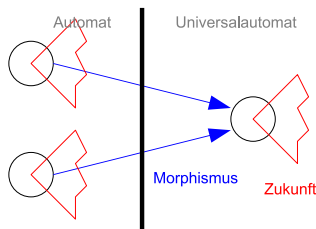
Morphismen in Universal-Automat

- Für alle Automaten \mathcal{A}_L gibt es einen Morphismus $\varphi_{\mathcal{A}}$ in \mathcal{U}_L .
- Für alle kleineren Automaten (als \mathcal{U}_L) ohne verschmelzbare Zustände ist $\varphi_{\mathcal{A}}$ injektiv.



Morphismen in Universal-Automat

- Für alle Automaten \mathcal{A}_L gibt es einen Morphismus $\varphi_{\mathcal{A}}$ in \mathcal{U}_L .
- Für alle kleineren Automaten (als \mathcal{U}_L) ohne verschmelzbare Zustände ist $\varphi_{\mathcal{A}}$ injektiv.



Morphismen in Universal-Automat

- Für alle Automaten \mathcal{A}_L gibt es einen Morphismus $\varphi_{\mathcal{A}}$ in \mathcal{U}_L .
- Für alle kleineren Automaten (als \mathcal{U}_L) ohne verschmelzbare Zustände ist $\varphi_{\mathcal{A}}$ injektiv.

⇒ Jeder zustandsminimale NEA für L ist Subautomat von \mathcal{U}_L .



Aufzählen aller Subautomaten

- Jeder zustandsminimale NEA für L ist Subautomat von \mathcal{U}_L .
- Finden: Jeden Subautomaten auf Sprachgleichheit testen.
- Sprachäquivalenz von NEAs sehr aufwendig.
Zusätzliche Tests für schnellen Ausschluss:
 - Heuristiken
 - Konsistenzbedingungen



Aufzählen aller Subautomaten

- Jeder zustandsminimale NEA für L ist Subautomat von \mathcal{U}_L .
- Finden: Jeden Subautomaten auf Sprachgleichheit testen.
- Sprachäquivalenz von NEAs sehr aufwendig.
Zusätzliche Tests für schnellen Ausschluss:
 - Heuristiken
 - Konsistenzbedingungen

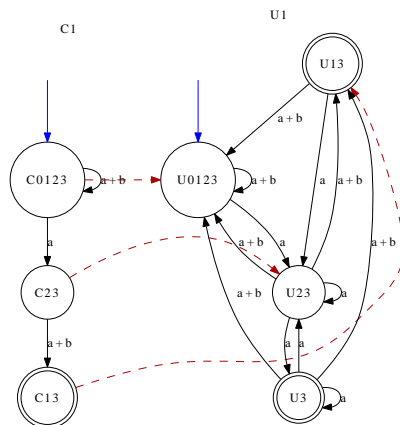


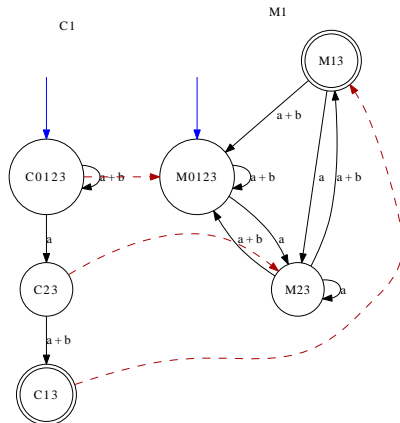
Konsistenzbedingung

Gegeben einen DFA \mathcal{A}_L und seinen Universalautomaten \mathcal{U}_L , ein Subautomat \mathcal{M} hat die gleiche Sprache, falls

- a) $\bigcup_{F \in Q^M, F \subseteq Q_F^A} F = Q_F^A$
 (Alle Endzustände von \mathcal{A} sind abgedeckt)
- b) $\forall a \in \Sigma, \forall q \in Q^A, \forall P \in Q^M :$
 $[\delta^A(q, a) = p \wedge p \in P]$
 $\rightarrow [\exists S \in Q^M : q \in S \wedge \delta^A(S, a) \subseteq P]$
 (Induktion Rückwärts ab Endzuständen: $w \in L \Rightarrow$
 es existiert Rückwärtslauf über w zu einem Startzustand)



Beispiel für $L = \Sigma^* a \Sigma$ 

Beispiel für $L = \Sigma^* a \Sigma$ 

Inhalt

- 1 Einführung
- 2 Konstruktion des Universal-Automaten
- 3 NEA-Minimierung
- 4 **Fazit**



Fazit

- Universalautomat durch einfache Operationen Berechenbar
- Liefert Eigenschaften von Sprache und Faktorisierungen
- Hilft bei NEA Zustandsminimierung



Fragen?

Danke für eure Aufmerksamkeit!

